Piensa como un Olímpico
Teoría de Polinomios

Samuel José Molina Ruiz

31 de octubre, 2025

Preliminares

Un *polinomio* en una variable x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números (enteros, racionales, reales, complejos,...). Cada sumando en la expresión anterior es un *término* o *monomio* del polinomio. El término con la mayor potencia de x y coeficiente distinto de cero, $a_n x^n$, se llama *término líder*, y el número n recibe el nombre de *grado* del polinomio, denotado como $gr(P)$. El término a_0 se llama *termino constante*. Un polinomio es *constante* si su único término es el término contante, y si este término es 0, se dice que el polinomio es *nulo*.

1 División de polinomios: Regla de Ruffini

Cuando dividimos un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$, podemos usar un método rápido llamado Regla de Ruffini.

1. Se escriben los coeficientes de $P(x)$ en una fila, **incluyendo** los términos cuyos coeficientes son cero
2. A la izquierda se escribe el número a (recuerda: el divisor es $x - a$)
3. Se baja el primer coeficiente tal cual
4. Se multiplica ese número por a y el resultado se suma al siguiente coeficiente
5. Se repite hasta el final: el último número que se obtiene es el resto

Ejemplo. Dividir $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ entre $x + 2$.

	2	3	0	-5
-2		-4	2	-4
	2	-1	2	-9

Entonces, el cociente de dividir $P(x)$ entre $x + 2$ es $2x^2 - x + 2$ y el resto es -9.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces las posibles soluciones racionales ($x = p/q$) satisfacen:

- p es divisor de a_0
- q es divisor de a_n
- p y q son coprimos ($\text{mcd}(p, q) = 1$)

2 Raíces de un polinomio

Un número a es *raíz* del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$. En este caso, la división de $P(x)$ entre $x - a$ es exacta y $P(x)$ se puede factorizar como $P(x) = (x - a)Q_1(x)$. Si a es también raíz de $Q_1(x)$, entonces se podrá escribir $Q_1(x) = (x - a)Q_2(x)$ y por lo tanto $P(x) = (x - a)^2 Q_2(x)$, y así sucesivamente. A la mayor potencia de $x - a$ que divide a $P(x)$ se le llama *multiplicidad* de la raíz a. Si la multiplicidad es 1 se dice que a es simple, si es 2 se dice que a es una raíz doble, etc.

Para hallar raíces de polinomios de grado 2 podemos hacer uso de la fórmula cuadrática: si $P(x) = ax^2 + bx + c$, entonces sus raíces son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una técnica útil para trabajar con ecuaciones de segundo grado se conoce como *completar el cuadrado* y se basa en reescribir el polinomio de la forma $P(x) = A(x + B)^2 + C$.

Para ciertos polinomios o ecuaciones de grado superior a 2, existen fórmulas equivalentes a la cuadrática para encontrar las raíces o resolverlas, pero suelen ser muy engorrosas y poco prácticas. Si en una olimpiada es necesario resolver una ecuación de grado superior, lo más probable es que se pueda resolver por algún método sencillo (Ruffini, completar el cuadrado, etc).

Teorema de identidad de polinomios

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números diferentes tales que $P(x_i) = Q(x_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, con $n > \text{gr}(P)$ y $n > \text{gr}(Q)$, entonces P e idéntico a Q.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante tiene al menos una raíz en los números complejos. De esta forma, todo polinomio se puede escribir como

$$P(x) = a_n \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

donde a_n es una contante (que debe ser igual al coeficiente de x^n en $P(x)$) y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces de $P(x)$ (cada raíz aparece tantas veces como indique su multiplicidad).

Fórmulas de Cardano-Vieta

Consideramos el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Además, sean $x_1, \ldots, x_n$ las raíces de $P(x)$, contando multiplicidades. Entonces, las fórmulas de Cardano-Vieta nos permiten relacionar los coeficientes del polinomio con sus raíces:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le i \le n} x_i &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j &= +\frac{a_{n-2}}{a_n} \\
\sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots \\
x_1 x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

Piensa como un Olímpico
Problemas de Polinomios

Samuel José Molina Ruiz

31 de octubre, 2025

1 División de polinomios: Regla de Ruffini

1. Divide $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ entre $x - 2$ usando la regla de Ruffini. Indica el cociente y el resto.
2. Divide $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 4x + 5$ entre $x + 1$ aplicando la regla de Ruffini. Escribe el cociente y el resto.
3. Divide $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 4x + 5$ entre $x^2 + 2x + 1$ aplicando la regla de Ruffini. Escribe el cociente y el resto.
4. Divide $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x - 10$ entre $x - 2$ usando la regla de Ruffini. Comprueba que el resto es cero.
5. Halla los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + 5x - 2$ sea divisible entre $x - 1$.

2 Raíces de un polinomio

1. Hallar las soluciones de $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 + 2x - 2 = 0$ y $2x^2 - x - 2 = 0$.
2. Hallar las soluciones de $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$.
3. Hallar las soluciones de $3x^3 - 18x^2 - 12x + 72 = 0$.
4. Hallar las soluciones de $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$.
5. Hallar las soluciones de $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$.
6. Hallar las soluciones de $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$.

Teorema de identidad de polinomios

1. Sea $P(x)$ un polinomio de grado n y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ raíces del polinomio, contando multiplicidades. Demostrar que $P(x)$ es nulo.
2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado menor que 5 tal que $P(n) = n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Calcula $P(6)$.

Teorema Fundamental del Álgebra

1. Encuentra el polinomio que tiene por raíces simples 1 y -1, y tiene a 3 como raíz doble.
2. Sea $P(x) = x^3 + 2x + 1$ y sean x_1, x_2, x_3 sus raíces. Sea $Q(x) = x - 1$ Calcula el producto

$$Q(x_1)\ Q(x_2)\ Q(x_3)$$

Fórmulas de Cardano-Vieta

1. Si a, b, c son las tres raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, calcula $a + b + c$ y abc.
2. Si a, b, c son las tres raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, calcula $a^2 + b^2 + c^2$.

Más problemas

1. Sean x, y, z números reales tales que

$$x + y + z = 2, \quad xy + yz + xz = -1, \quad xyz = -2$$

Hallar el valor de las siguientes expresiones:

$$\text{a) } x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{b) } x^3 + y^3 + z^3, \quad \text{c) } x^4 + y^4 + z^4$$

2. Calcular $a, b \in \mathbb{R}$ para que $ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $x^2 + 2x + 1$.

3. ¿Existe algún polinomio $P(x)$ que cumpla que $xP(x-1) = (x+1)P(x)$, para todo valor $x \in \mathbb{R}$?

4. Sabemos que una de las raíces del polinomio de coeficientes reales $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es la suma de las otras dos. Demostrar que $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

5. Hallar los polinomios mónicos de grado 3 que satisfacen que la suma de los cuadrados de sus raíces sea positiva.

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ de forma que la suma de los cuadrados de las raíces de $P(x) = x^3 - 2ax^2 + (a+1)x - a^3$ sea mínima y hallar dicha suma.

7. Si sabemos que la ecuación $x^3 + 2\lambda x^2 - \lambda x + 10 = 0$ tiene tres soluciones reales que están en progresión aritmética (λ es un parámetro y x es la incógnita), hallar estas tres soluciones.

8. Denotamos a, b, c las tres raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. La ecuación cuyas raíces son $a+b, a+c, b+c$ es $x^3 - 6x^2 + 4x + 9 = 0$. Determina p, q, r.

9. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Halla B.

10. Halla todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2 \\ xyz &= 4 \end{aligned}$$

11. Consideramos el polinomio

$$P(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente si $a = b = c$. (Fase Local 2020)

12. Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2$. Determina $P(x^2-1)$. (Canguro 2003)

13. Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas. (Fase Nacional 2015)

14. Un polinomio mónico de cuarto grado verifica que $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$. Calcula $P(12) - P(-8)$. (Olimpiada Internacional)

15. Sea $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ y sean x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sus raíces. Sea $Q(x) = x^2 - 2$. Calcula el producto

$$Q(x_1)\ Q(x_2)\ Q(x_3)\ Q(x_4)\ Q(x_5)$$

16. Sean a y b enteros. Demuestra que la ecuación $(x-a)(x-b)(x-3) + 1 = 0$ admite a lo sumo una solución entera. (Fase Nacional 2015)

17. Sabemos que el polinomio $P(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros. Hallar los posibles valores de k.

18. Sea $Q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple que $Q(n) = 1/n$, para todo $n = 1, 2, \ldots, 2024$. Halla el valor $Q(2025)$. (Fase Nacional 2025)