Ecuaciones funcionales

Adrián Ruiz Serván

28 de noviembre de 2025

1 Introducción

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones albegraicas denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Normalmente, las incógnitas se representan con letras e indican los valores que se pretenden hallar. Por ejemplo, en la ecuación

$$2x + 6 = 3x$$

la variable x representa la incógnita que se pretende hallar t los coeficientes $2, 6$ y 3 son las constantes conocidas. La igualdad que se plantea en la ecuación puede ser cierta o falsa:

- Cierta: Existen ciertos valores para las incógnitas que hacen que la ecuación se cumpla. En el ejemplo anterior, bastaría tomar $x = 6$.
- Falsa: No existen valores para las incógnitas que hacen que la ecuación se cumpla.

Los tipos de ecuaciones más conocidas son:

- Ecuaciones algebraicas
  - Ecuaciones de primer grado : $x + 2 = 2x - 2$.
  - Ecuaciones de segundo grado: $x^2 - 2x + 1 = 0$.
  - Ecuaciones diofánticas: $x + y = 5$.
  - Racionales.
- Ecuaciones trascendentes: $\sin(x) + e^x = 1$.
- **Ecuaciones funcionales**

Por tanto, antes de nada, necesitamos introducir (o repasar) el concepto de **función**.

2 Primeras ecuaciones funcionales y técnica básica

Sean X e Y dos conjuntos.

Definición

Una aplicación o función $f : X \to Y$ es una regla que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$, el cual escribimos como $y = f(x)$.

Como primer ejemplo de función podemos considerar $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ y $f : X \to Y$ definida mediante $f(x) = 2x + 1$. Así por ejemplo tendremos que $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ y $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Un segundo ejemplo es $X = (0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ y $f : X \to Y$ definida mediante $f(x) = \sqrt{x}$.

Definición

Las ecuaciones donde las incógnitas son funciones reciben el nombre de ecuaciones funcionales. Aunque no existe una técnica establecida para resolverlas, pueden estudiarse técnicas que ayuden a la resolución de las mismas.

Ejercicio

Hallar todas las funciones $f(x)$ tales que $3f(2 - x) - 2f(x) = x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio

Resolver la ecuación funcional

$$x^2 - 2f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R},\, x \neq 0.$$

3 Técnicas más avanzadas de resolución

3.1 Evaluación de la ecuación en valores que permiten simplificar

En muchos casos, la ecuació funcional se simplifica mucho al evaluar una o más variables involucradas en ciertos valores. Este método suele usarse en combinación con otros a la hora de resolver dichas ecuaciones.

3.2 Inyectividad y sobreyectividad

Definición

Una función $f : X \to Y$ es inyectiva si para cada $a, b \in X$ tales que $f(a) = f(b)$ se cumple necesariamente que $a = b$.

Definición

Una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva si para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ejercicio

Calcula todas las funciones inyectivas tales

$$f(x + f(y)) = f(y + f(x)).$$

3.3 Aditividad y multiplicatividad

Definición

Una función $f : X \to Y$ es aditiva si para cada $x, y \in X$ se cumple que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Definición

Una función $f : X \to Y$ es multiplicativa si para cada $x, y \in X$ se cumple que $f(xy) = f(x)f(y)$.

Resultado importante que se puede usar en problemas:

Teorema

Si f es una función multiplicativa que además es continua, entonces o bien $f(x) = 0$, o $f(x) = 1$, o $f(x) = x^n$ o $f(x) = |x^m|$, para algún m no nulo.

3.4 Puntos fijos

Definición

Un punto fijo de una función f se define como un valor p que verifica $f(p) = p$.

3.5 Funciones de variable entera

Una función $f : X \to Y$ se dice de variable entera que toma valores enteros si $X = \mathbb{Z}$ e $Y = \mathbb{Z}$.

Ejercicio

Denotamos por $\mathbb{N}^*$ al conjunto de los números naturales excluyendo al cero y por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales incluyendo al cero. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ que cumplen:

- Son crecientes, esto es $f(n) \geq f(m)$ si $n \geq m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}^*$.

4 Problemas de fase local

Ejercicio

Encuentra todas las funciones $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ que cumplen

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Ejercicio

Hallas todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen la condición

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Ejercicio

Hallar todos los polinomios $P(t)$ que cumplen

$$P(x^2 - y^2) = P(x + y)P(x - y).$$