Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática

Desigualdades (y Polinomios y otras funciones) UCA

1. ¿Qué es una desigualdad?

Existe una propiedad muy importante en los números reales: la propiedad de **tricotomía** u orden total. Es decir, dados $x, y \in \mathbb{R}$, números reales, o son iguales o uno es mayor que otro. Esto se escribe como $x = y$, $x > y$ ó $x < y$. De hecho, podemos condensar aún más la información y decir que $x \leq y$ o $x \geq y$. Así, tenemos por ejemplo que $x = y$ si y sólo si $x \geq y$ y $x \leq y$.

Las desigualdades son objetos matemáticos que pueden ser manipulados. Por ejemplo:

- Podemos sumar un número real a ambos lados de una desigualdad

$$x \leq y \iff x + a \leq y + a, a \in \mathbb{R}$$

  Por ejemplo $0 < 2$, por tanto $1 < 3$

- De hecho, podemos sumar desigualdades

$$x \leq y, z \leq w \implies x + z \leq y + w$$

  Así, $-2 < 4$ y $1 < 10$, luego $-1 < 14$

- Podemos multiplicar desigualdades por números reales distintos de cero. Así, dado un número $a > 0$,

$$x < y \implies a \cdot x < a \cdot y.$$

  Por ejemplo. $-3 < -1$ luego $-6 < -2$. Pero si el número es negativo, $b < 0$, **la desigualdad cambia de sentido**

$$x < y \implies b \cdot y < b \cdot x$$

  Tenemos que $-1 < 9$, y multiplicando por -1, observamos que $1 < -9$ es **falso**. Hay que invertir la desigualdad, $-9 < 1$.

- Por último, podemos multiplicar desigualdades pero sólo si todos los términos son no negativos (positivos o cero):

$$x \geq y \geq 0, w \geq z \geq 0 \implies w \cdot x \geq z \cdot y \geq 0$$

  Por ejemplo, $3 > 1 > 0$ y $1/3 > 1/10 > 0$, luego $1 > 1/10 > 0$. Sin embargo, si todos los términos son positivos no podemos decir nada sobre el resultado, pues depende del caso:

- $3 > -1$ y $1/3 > 1/10$, y observamos que es verdad que $1 > -1/10$.
- $3 > -1$ y $1/3 > -1$, pero $1 > 2$ es falso.

Por ello, no es buena idea intentar multiplicar desigualdades en las que aparecen términos negativos.

2. Algunas desigualdades básicas

1. $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad solo se cumple para $x = 0$.

2. Desigualdad de los cuadrados: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera, entonces
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$$

3. Si $x > 0$, entonces $1/x > 0$.

4. Si $x > 0$, entonces
$$x + 1/x \geq 2,$$
alcanzándose la igualdad si y sólo si $x = 1$.

5. (Desigualdad triangular.) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$
La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

6. Una propiedad triangular: si a, b, c son números positivos son los lados de un triángulo si y sólo si
$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

7. (Reordenamiento.) Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces
$$ax + by \geq ay + bx.$$

8. Medias: aritmética (A), geométrica (G), armónica (H) y cuadrática (Q). Si $a, b > 0$,
$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad G = \sqrt{ab}, \qquad H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \qquad Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$
Entonces
$$\text{mín}\{a, b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \text{máx}\{a, b\},$$
y las igualdades se cumplen si y solo si $a = b$.

- Sea un rectángulo de lados a y b. Su área es $a \cdot b$ y su perímetro es $2(a+b)$. Por otro lado, un cuadrado con el mísmo perímetro tiene lado $(a+b)/2$, y debe tener área $(a+b)^2/4$. De la desigualdad $H \leq A$ deducimos

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \equiv ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

Es decir, dados un rectángulo y un cuadrado con el mismo perímetro, el área del rectángulo es menor o igual que la del cuadrado. En otras palabras, de entre todos los rectángulos con un perímetro fijado, el de mayor área es el cuadrado.

- Sea un rectángulo de área $a \cdot b$. Su perímetro es $2(a+b)$. Un cuadrado con el mismo área tiene lado $\sqrt{a \cdot b}$, y su perímetro es $4\sqrt{a \cdot b}$. Por tanto, la desigualdad $G \leq A$ nos permite concluir

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \equiv 4\sqrt{a \cdot b} \leq 2(a+b).$$

Así, el perímetro de un rectángulo es siempre mayor o igual que el de un cuadrado si fijamos el área.

Algunas interpretaciones geométricas de estas desigualdades:

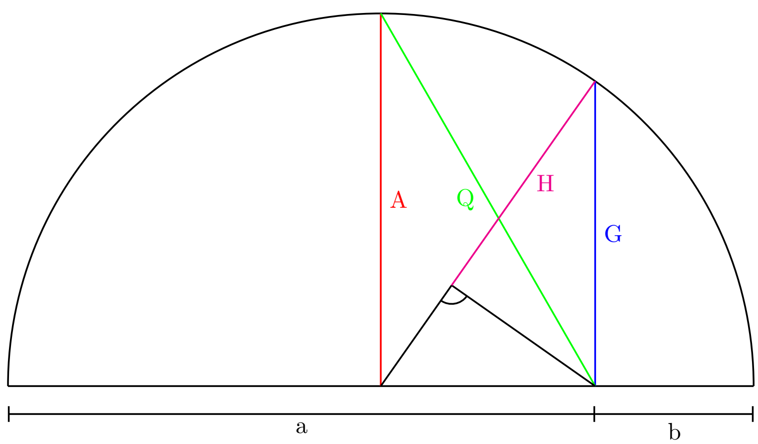

Figura 1: Las desigualdades entre las medias tienen la siguiente visualización que también cuánto se parecen y cuánto se diferencian en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b

3. Desigualdades entre Medias: caso general

Ya hemos considerado antes, e interpretado, las medias de dos números reales positivos. Dados n números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suelen considerarse las siguientes medias:

- **Media aritmética.**
$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$
- **Media geométrica.**
$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$
- **Media armónica.**
$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$
- **Media cuadrática.**
$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

La mismas desigualdades que vimos para las medias entre dos números se tienen en el caso de n números:

$$\min_k\{a_k\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max_k\{a_k\}$$

4. Desigualdades de reordenación

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales tales que

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, \quad b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n.$$

Además, consideremos todas las sumas de la forma

$$a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \ldots + a_n b_{i_n},$$

donde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ es una reordenación de los números $(1, 2, \ldots, n)$. Entonces, la suma máxima se alcanza para $(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (1, 2, \ldots, n)$ y la suma mínima para $(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (n, n-1, \ldots, 1)$.

5. Desigualdades y cambios de variable

A continuación presentamos algunas nociones e ideas generales sobre cambios de variables aplicados a problemas de desigualdades. Vemos diversas situaciones en las que son de utilidad:

Cambios lineales

Supongamos que tenemos una expresión que depende de tres variables a, b, c. Entonces, podemos hacer un cambio lineal, es decir, definir nuevas variables x, y, z como combinación lineal de estas:

$$\begin{aligned} x =& h_{11}a + h_{12}b + h_{13}c, \\ y =& h_{21}a + h_{22}b + h_{23}c, \\ z =& h_{31}a + h_{32}b + h_{33}c, \end{aligned}$$

donde $h_{11}, h_{12}, \ldots$ son números reales. Entonces, estas constantes definen a a, b, c linealmente a partir de x, y, z. Es importante que el sistema sea invertible, es decir, que se puedan despejar a, b, c en términos de x, y, z. Algunos casos que suelen ser útiles son los siguientes, para dos y tres variables:

$$\begin{aligned} x =& a + b, \\ y =& a - b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x =& b + c, \\ y =& a + c, \\ z =& a + b \end{aligned}$$

Lo importante es darse cuenta de que estos cambios son invertibles (prueba a despejar las antiguas variables en función de las nuevas), luego si a, b, c se mueven en $\mathbb{R}$ también x, y, z se mueven en $\mathbb{R}$. Eso no quiere decir que si a, b, c son positivos, también lo sean x, y, z o viceversa.

Cambios para salvar restricciones

En muchas ocasiones, las desigualdades con las que tratamos tienen alguna restricción; por ejemplo, se nos dice que las variables tienen una suma o un producto concreto:

- Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son positivos y $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, entonces podemos hacer el cambio

  $$x_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad x_2 = \frac{a_2}{a_3}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad x_n = \frac{a_n}{a_1}.$$

  Parece que este cambio complica las cosas pero ahora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos cualesquiera y la restricción ha desaparecido.

- Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales tales que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, entonces podemos hacer el cambio

  $$x_1 = a_1 - a_2, \quad x_2 = a_2 - a_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1} - a_n, \quad x_n = a_n - a_1,$$

  donde ahora $a_1, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera.

Desigualdades con los lados de un triángulo

Recuerda que a, b, c son los lados de un triángulo si y solo si

$$a \leq b + c, \quad b \leq a + c, \quad c \leq a + b.$$

En otras palabras, un lado no puede ser mayor que la suma de los otros dos. Ahora hay dos caminos principales para atacar estas desigualdades: primero, usar técnicas geométricas y relacionar la expresión que estamos manejando con elementos geométricos del triángulo (área, alturas, medianas, bisectrices, radios inscrito o circunscrito,...) y después usar un razonamiento geométrico; o bien, segundo, hacer el cambio

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = x + z,$$

siendo x, y, z números reales positivos cualesquiera, y trabajar con las técnicas de desigualdades. Más concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Cambio de variables para los lados de un triángulo

Tres números reales a, b, c son los lados de un triángulo si, y sólo si,

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = x + z,$$

para ciertos reales positivos x, y, z.

6. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para dos conjuntos de n números reales, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se verifica que

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right).$$

La igualdad se cumple si y sólo si las $n-$uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son una múltiplo de la otra.

7. La desigualdad de Jensen

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se aplica a una función convexa $f : I \to \mathbb{R}$, siendo I un cierto intervalo de números reales. Concretamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0$ verfican $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$, entonces

$$f(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n) \leq w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_n f(x_n).$$

Ejemplos de funciones convexas son $f(x) = x^a$ y $f(x) = a^x$ para $a > 1$. En el caso de que la función sea cóncava, la desigualdad de Jensen va en la dirección contraria, como por ejemplo en el caso del logaritmo $f(x) = \ln(x)$. En particular, la desigualdad de Jensen en ocasiones permite tratar desigualdades en las que aparecen funciones que no son polinómicas o racionales. Si la función $f(x)$ es estrictamente convexa, entonces la igualdad se alcanza si, y sólo si, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ o bien todos los pesos w_i son nulos salvo uno.

8. La desigualdad de Nesbitt

Dados tres números $a, b, c > 0$, se tiene que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si, y sólo si, $a = b = c$.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se aplica a una función convexa $f : I \to \mathbb{R}$, siendo I un cierto intervalo de números reales. Concretamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0$ verfican $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$, entonces

$$f(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n) \leq w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_n f(x_n).$$

Piensa como un Olímpico: Problemas de desigualdades y sucesiones

Cuadernillo preparado por Beltrán de la Flor Gandarillas

December 5, 2025

Problema 1.1. Sean r, s, u, v números reales cualesquiera. Demostrar que

$$\min\{r - s^2, s - u^2, u - v^2, v - r^2\} \leq \frac{1}{4}$$

Problema 1.2. Sean x, y, z números reales positivos.

1. Si $x + y + z \geq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$?
2. Si $x + y + z \leq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$?

Problema 1.3. Demostrar que, si $a_1, a_2, \ldots a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

¿Cuándo es válida la igualdad?

Problema 1.4. Sea $a \neq 1$ un número real positivo y $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1. Demostrar que

$$n^2 < \frac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$$

Problema 1.5. Sean a, b, c tres números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a + b + 3c}{3a + 3b + 2c} + \frac{a + 3b + c}{3a + 2b + 3c} + \frac{3a + b + c}{2a + 3b + 3c} \geq \frac{15}{8}$$

Problema 1.6. Sean $x, y \geq 0$ números reales verificando $x + y = 2$. Demuestra que

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$$

Problema 1.7. Dados a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$, demostrar que

$$\left(\frac{a}{1 + ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1 + bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1 + ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

Problema 2.1. Supongamos que la sucesión a_n está definida como $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$ para todo natural n. Hallar las dos últimas cifras de a_{2025}

Problema 2.2. Consideremos la sucesión de enteros positivos $\{x_n\}$ definida por $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = 2x_n^3 + x_n$ para todo $n \geq 1$. Hallar la mayor potencia de 5 que divide a $x_{2025}^2 + 1$.

Problema 2.3. Se tienen dos progresiones de números reales, una aritmética $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y otra geométrica $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no constante. Se cumple que $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$ y $a_{10} = g_3$. Decidir, razonadamente, si para cada entero positivo p existe un entero positivo m tal que $g_p = a_m$.

Problema 2.4. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}, \quad \text{para } n \geq 3.$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n.
