Ecuaciones diofánticas (lineales)

Sesión de preparación Olimpiadas Matemáticas

Francisco José Ocaña Alcázar

19 de diciembre de 2025

1 Identidad de Bézout y algoritmo de Euclides

Lema 1 (Identidad de Bézout) *Sean a, b dos números enteros y $d = mcd(a, b)$. Entonces existen dos números enteros p y q tales que $ap + bq = d$.*

El algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor, nos sirve para encontrar los valores p y q que establece la identidad de Bézout.

Algoritmo de Euclides Dados dos números a y b, con $a > b$, podemos calcular su máximo común divisor de la siguiente manera:

1. **Dividir:** Divide el número mayor (a) entre el número menor (b) para obtener un cociente (q) y un resto (r).

2. **Reemplazar:** Sustituye el dividendo (a) por el divisor anterior (b), y el divisor (b) por el resto de la división anterior (r).

3. **Repetir:** Continúa dividiendo el divisor anterior entre el resto anterior hasta que el resto sea cero.

4. **Resultado:** El último divisor (el resto no nulo) es el MCD.

Ejemplo 1 *Calcula el máximo común divisor de* 525 *y* 100 *utilizando el algoritmo de Euclides. Obtén los coeficientes de la identidad de Bézout.*

2 Ecuaciones diofánticas lineales

Estas ecuaciones reciben este nombre en honor a Diofanto, matemático que trabajó en Alejandría a mediados del siglo III a.c. Fue uno de los primeros en introducir la notación simbólica en matemáticas y escribió seis libros sobre problemas en las que consideraba la representación de números anterior como suma de cuadrados.

Definición 1 (Ecuación diofántica lineal) *Una* ecuación diofántica lineal *es una ecuación lineal con coeficientes enteros y que exige soluciones también enteras.*

Teorema 1 (Solución particular) *Sean a, b y c tres enteros. La ecuación lineal $ax + by = c$ tiene solución entera si, y sólo si el máximo común divisor (d) de a y b divide a c.*

Corolario 1 (Forma de la solución particular) *Bajo las condiciones del Teorema 1, podemos afirmar que una solución particular de la ecuación $ax+by = c$, viene dada por:*

$$x_0 = \frac{cp}{d} \qquad e \qquad y_0 = \frac{cq}{d}$$

siendo $d = mcd(a, b)$, p y q los coeficientes de la identidad de Bézout.

Ejemplo 2 *Encontrar una solución para la ecuación diofántica:*

$$525x + 100y = 50$$

Teorema 2 (Solución general) *Sean a, b y c tres números enteros no nulos tales que d, máximo común divisor de a y b, divide a c. Entonces la solución general de la ecuación $ax + by = c$ es:*

$$x = x_0 + k\frac{b}{d} \qquad e \qquad y = y_0 - k\frac{a}{d}$$

siendo x_0 e y_0 una solución particular de la misma y k es cualquier número entero.

Ejemplo 3 *Obtener las soluciones enteras de la ecuación diofántica:*

$$66x + 550y = 88$$

3 Ejercicios propuestos

3.1 Problemas

1. Una empresa de restauración compra 12 garrafas de aceite para varios de sus locales. Algunas garrafas son de aceite de oliva virgen extra y otras de aceite de oliva suave. El precio total de la compra es de 1200 euros. Sabiendo que cada garrafa de aceite virgen extra cuesta 30 euros más que una de aceite suave, y ha comprado el mínimo posible de aceite suave, ¿Cuántas garrafas habrá comprado de cada una?

2. Una persona compra doce piezas de frutas entre peras y melocotones por 99 céntimos. Si una pera cuesta 3 céntimos más que un melocotón, y compra más peras que melocotones, ¿cuántas piezas compra de cada fruta?

3. Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3 sobran 2 y haciendo grupos de 4 sobran 3. Hallar el número de manzanas que contiene el cesto sabiendo que está entre 100 y 110.

4. Una banda de piratas se apodera de un botín de piezas de oro, todas de igual valor. Deciden repartirlas por igual y el resto, que son 3 piezas, dárselo al cocinero chino. Los piratas luchan entre sí y mueren 6 de ellos, con lo que ahora, al repartir con idéntico criterio, al cocinero le corresponden 4 piezas. De regreso al velero, la barca zozobra y se salvan el botín, 6 piratas y el cocinero, al que ahora, manteniendo el criterio de reparto, le corresponden 5 piezas. ¿Cuál es la fortuna mínima que puede esperar el cocinero cuando decide eliminar al resto de los piratas, sabiendo que la banda era inicialmente de 17 piratas, además del cocinero?

3.2 Cuestiones

1. Hallar los valores de $c \in \mathbb{Z}^+$, con $10 < c < 20$ para los cuales no tiene solución la ecuación diofántica $84x + 990y = c$. Determinar la solución para los restantes valores de c.

2. Hallar las soluciones enteras de la ecuación:

$$\sqrt{(x+y)(x-y) + (2x+2y-3)y - 2(x-7)} = x + y + 3$$

3. Hallar el menor entero positivo que dividido por 4, 7 y 11 da resto 3 y que dividido por 13 da resto 1.

4. Demostrar, en $\mathbb{Z}_0^+$, que todos los números que dan resto 1 al dividirlos por 3 y resto 7 al dividirlos por 11 dan resto 7 al dividirlos por 33.

3.3 Nivel Olimpiadas

1. Un rey quiere dividir a sus empleados en grupos de forma que el primer grupo pueda formar un rectángulo de cinco en línea, y el segundo grupo un rectángulo de siete en línea. Si durante nueve días no se repite el número de empleados en cada grupo, ¿cuál es el número mínimo de empleados?

2. Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación diofántica:

$$2(x+y) = xy + 9$$

3. Una mujer cobra un cheque por e euros y c céntimos en un banco. El cajero, por error, le da c euros y e céntimos. La mujer no se da cuenta hasta que gasta 23 céntimos y observa que en ese momento tiene 2e euros y 2c céntimos. ¿Cuál era el valor del cheque?

4. Encuentra de cuántas maneras diferentes podemos sumar 5 euros con 100 monedas de 1, 10 y 20 céntimos, indicando el número de monedas en cada caso.

Más información y ejercicios sobre ecuaciones diofánticas pueden encontrarse en: `https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2017/EEDD.pdf`