

Piensa como un Olímpico

Combinatoria

Octubre 2026

Marta Baldomero Naranjo

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Cádiz.

Cómo leer estas notas

Cada tema sigue siempre el mismo recorrido: primero un **problema** que nos hace sentir la necesidad de una idea; luego la **herramienta** que lo resuelve; y por último **más problemas resueltos** que enseñan a usarla. Los colores te orientan:

Problema	Un reto que motiva la herramienta. Intenta resolverlo antes de seguir leyendo.
Pensemos	Pistas y ensayos con casos pequeños.
Herramienta	El resultado o principio que vamos a utilizar, con su demostración.
Ejemplo	Problemas resueltos con la herramienta, con su solución en verde.
Para practicar	Ejercicios para que lo intentes tú. Las pistas y respuestas están al final.

Índice

1. Combinatoria: el arte de contar	2
1.1. Variaciones con repetición	2
1.2. Variaciones sin repetición y permutaciones	3
1.3. Permutaciones con repetición	4
1.4. Combinaciones	6
2. Calcular una probabilidad	9
3. Principio del palomar	11
4. Problemas	15

Este documento se ha elaborado a partir de los apuntes y materiales previos de Antonio Aranda, Rafael Espínola, Juan González-Meneses y Antonio Pallares.

1. Combinatoria: el arte de contar

La combinatoria nos permite *contar* agrupaciones u ordenaciones de elementos de un conjunto sin tener que listarlas una a una. Todo lo que sigue es una consecuencia de una idea muy sencilla.

Herramienta: Regla del producto

Si un proceso consta de varios pasos, y hay n_1 formas de hacer el primero, n_2 de hacer el segundo, $\dots$, n_r de hacer el último (sin importar cómo se hicieron los anteriores), entonces el proceso completo puede hacerse de

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$$

formas distintas.

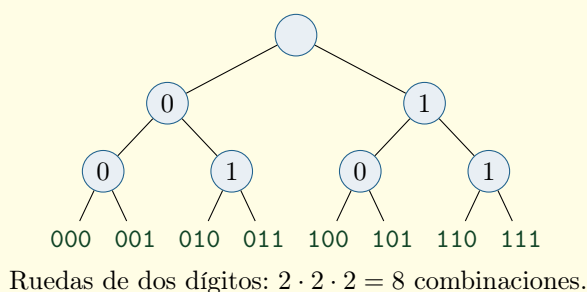
Por ejemplo, con 4 camisetas, 3 pantalones y 2 pares de zapatillas podemos vestirnos de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ formas. Veremos que todas las fórmulas de esta sección son esta regla disfrazada.

1.1 Variaciones con repetición

Problema 1.1: El candado olvidado

Un candado tiene 3 ruedas y cada una muestra un dígito del 0 al 9. Has olvidado la combinación. ¿Cuántas combinaciones hay? Si pruebas una por segundo, ¿cuánto tardarás como máximo en abrirlo?

Pensemos. Empecemos con un candado de ruedas de solo dos dígitos, 0 y 1. El árbol de abajo muestra todas las combinaciones: en cada rueda las posibilidades *se duplican*. Con 10 dígitos en lugar de 2, se multiplicarían por 10 en cada rueda.



Herramienta: Variaciones con repetición

Si tenemos un conjunto de n elementos y formamos listas ordenadas de k elementos, pudiendo repetir un mismo elemento, el número de listas es

$$VR_n^k = n^k.$$

Demostración. Numeramos los elementos del 1 al n . Una lista es una sucesión de k números, cada uno con n valores posibles. Por la regla del producto hay $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ veces}} = n^k$ listas.

Solución. Hay $10^3 = 1000$ combinaciones. Probando una por segundo tardaríamos, en el peor caso, $1000 \text{ s} \approx 16 \text{ min } 40 \text{ s}$.

Ejemplo 1.2: La encuesta de consumo responsable

Una encuesta sobre consumo responsable tiene 15 preguntas, y cada una se responde con una de tres opciones: «siempre», «a veces» o «nunca». ¿Cuántas hojas de respuestas distintas pueden rellenarse contestando todas las preguntas?

Solución. Cada pregunta es una «rueda» con 3 valores, así que hay $3^{15} = 14\,348\,907$ hojas de respuestas distintas.

Ejemplo 1.3: Matrículas

Una matrícula consta de 4 dígitos seguidos de 3 letras, tomadas de un alfabeto de 20 letras. ¿Cuántas matrículas hay?

Solución. Los dígitos se pueden repetir: 10^4 opciones. Las letras también: 20^3 . En total $10^4 \cdot 20^3 = 80\,000\,000$ matrículas.

Ejemplo 1.4: Subconjuntos

¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

Solución. Para construir un subconjunto decidimos, elemento a elemento, si entra o no entra: 2 opciones por elemento. Hay 2^n subconjuntos (contando el vacío y el total). Para $n = 10$ son 1024.

1.2 Variaciones sin repetición y permutaciones**Problema 1.5: El podio**

En una carrera participan 8 atletas. ¿De cuántas formas distintas pueden repartirse el oro, la plata y el bronce?

Pensemos. Ahora ya no se puede repetir: quien gana el oro no puede ganar también la plata. Hay 8 candidatos al oro; una vez elegido, quedan 7 para la plata; y después 6 para el bronce.

Herramienta: Variaciones sin repetición y permutaciones

Las listas ordenadas de k elementos *distintos* tomados de un conjunto de n elementos (con $k \leq n$) son

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

En el caso particular $k = n$ (ordenar todos los elementos) se llaman **permutaciones** y su número es $P_n = n!$ (recordemos que $0! = 1$).

Demostración. El primer elemento de la lista tiene n posibilidades; el segundo, $n-1$ (no puede repetir el anterior); el tercero, $n-2$; y así hasta el k -ésimo, que tiene $n-k+1$. Se aplica la regla del producto.

Solución. $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$ podios posibles.

Ejemplo 1.6: El autobús

Un autobús tiene 60 asientos. Si hay 100 personas, ¿de cuántas formas se pueden sentar 60 de ellas?

Solución. Hay que elegir y ordenar 60 personas de entre 100:

$$100 \cdot 99 \dots \cdot 41 = \frac{100!}{(100 - 60)!} = \frac{100!}{40!} \approx 1,14 \cdot 10^{110}.$$

(Un número de 111 cifras.)

Ejemplo 1.7: Números de tres cifras distintas

¿Cuántos números de 3 cifras tienen todas sus cifras distintas?

Solución. Hay que tener cuidado con el cero. La primera cifra no puede ser 0: 9 opciones. La segunda puede ser cualquiera (incluido el 0) salvo la primera: 9 opciones. La tercera, cualquiera salvo las dos anteriores: 8 opciones. Total: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Lección: cuando una posición tiene una restricción, **se rellena primero la posición más restringida**.

Ejemplo 1.8: Mesa redonda

¿De cuántas formas pueden sentarse 5 amigos (a) en una fila de 5 sillas? (b) alrededor de una mesa circular, si dos disposiciones que se obtienen girando la mesa se consideran iguales?

Solución. (a) $5! = 120$.

(b) Hay $5!$ ordenaciones en las sillas numeradas, pero cada disposición real aparece 5 veces (una por cada giro). Entonces hay $5!/5 = 4! = 24$. Otra forma de verlo es sentar primero a un amigo (sin importar dónde) y ordenar a los 4 restantes respecto a él.

1.3 Permutaciones con repetición

Problema 1.9: Anagramas

¿Cuántas palabras distintas (con o sin sentido) pueden formarse reordenando todas las letras de ANA? ¿Y las de MATEMATICAS?

Pensemos. Si las tres letras de ANA fueran distintas habría $3! = 6$ ordenaciones. Etiquetemos las A como A_1 y A_2 :

$A_1 N A_2$	$A_2 N A_1$
$A_1 A_2 N$	$A_2 A_1 N$
$N A_1 A_2$	$N A_2 A_1$

Cada fila da la misma palabra (ANA, AAN, NAA), así que hay $6/2 = 3$ palabras. Cada palabra se contó $2!$ veces porque podemos intercambiar las dos A.

Herramienta: Permutaciones con repetición

Si tenemos n elementos de los cuales uno se repite k_1 veces, otro k_2 veces, $\dots$, y otro k_m veces (así $k_1 + \dots + k_m = n$), el número de ordenaciones distintas es

$$PR_n^{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Demostración. Si todos los elementos fueran distintos habría $n!$ ordenaciones. Pero al permutar entre sí los k_1 elementos iguales (o los k_2 , etc.) obtenemos la misma ordenación. Cada ordenación real se ha contado $k_1! k_2! \dots k_m!$ veces, así que dividimos por ese número.

Solución. MATEMATICAS tiene 11 letras: M (2 veces), A (3), T (2), E (1), I (1), C (1), S (1). Hay

$$\frac{11!}{2! 3! 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3!}{2! 3! 2!} = 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 5 = 1\,663\,200$$

palabras.

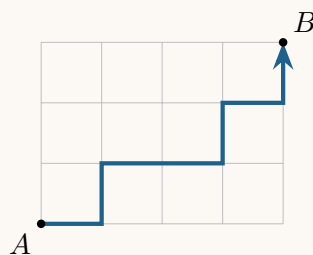
Ejemplo 1.10: Las bolas de colores

Tenemos 10 bolas: 3 negras, 3 blancas, 3 azules y 1 roja. ¿De cuántas formas se pueden alinear?

Solución. $\frac{10!}{3! 3! 3! 1!} = \frac{3\,628\,800}{216} = 16\,800.$

Ejemplo 1.11: Caminos en una cuadrícula

Un caminante va de A a B por las líneas de la cuadrícula, moviéndose solo hacia la derecha (D) o hacia arriba (U). ¿Cuántos caminos distintos hay si B está 4 pasos a la derecha y 3 hacia arriba?



El camino dibujado es DDUDDU.

Solución. Cada camino se codifica con una palabra de 7 letras con exactamente 4 letras D y 3 letras U . Hay

$$\frac{7!}{4! 3!} = 35$$

caminos.

1.4 Combinaciones

Hasta ahora el orden importaba. Veamos qué pasa cuando no importa.

Problema 1.12: Los apretones de manos

En una reunión hay 10 personas y cada una saluda con un apretón de manos a todas las demás. ¿Cuántos apretones de manos hay?

Pensemos. Si contamos «la persona que saluda y la persona saludada» como una lista ordenada de 2 personas distintas, tenemos $10 \cdot 9 = 90$ listas. Pero el apretón entre A y B aparece dos veces: como (A, B) y como (B, A) . Entonces hay $90/2 = 45$ apretones. Hemos dividido por el número de formas de ordenar cada grupo.

Herramienta: Combinaciones

El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos (sin importar el orden) es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \quad (k \text{ factores arriba y } k \text{ abajo}).$$

Demostración. Las listas ordenadas de k elementos distintos son $\frac{n!}{(n-k)!}$. Cada subconjunto de k elementos aparece en $k!$ listas (una por cada orden). Por tanto, hay que dividir por $k!$.

Solución. $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ apretones.

Herramienta: Propiedades de los números combinatorios

Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$.

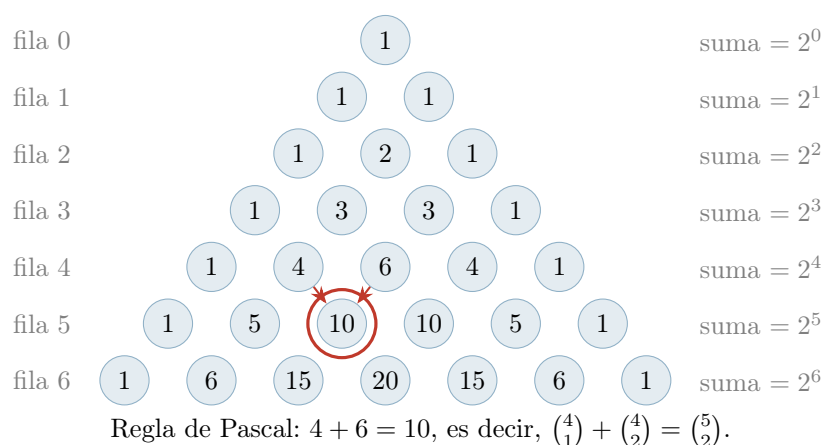
- (a) **Simetría:** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (elegir los k que entran es lo mismo que elegir los $n-k$ que se quedan fuera).
- (b) **Regla de Pascal:** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- (c) **Identidad de Vandermonde:** para todo $j \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \binom{n-j}{k-i}.$$

- (d) **Binomio de Newton:** $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. En particular, con $a = b = 1$:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Estas propiedades se leen directamente en el **triángulo de Tartaglia (Pascal)**: si numeramos las filas desde 0 y los elementos de cada fila desde 0, el elemento k de la fila n es $\binom{n}{k}$. Cada número es la suma de los dos que tiene encima (regla de Pascal) y cada fila suma el doble que la anterior.

**Ejemplo 1.13: Huertos urbanos**

Un ayuntamiento dispone de 49 solares vacíos y quiere convertir 6 de ellos en huertos urbanos comunitarios. ¿De cuántas formas puede elegir los 6 solares?

Solución. El orden no importa, así que hay $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13\,983\,816$ formas.

Ejemplo 1.14: La baraja

De una baraja de 40 cartas, ¿cuántas manos de 7 cartas pueden obtenerse?

Solución. El orden de extracción no importa, así que hay

$$\binom{40}{7} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 18\,643\,560$$

manos.

Ejemplo 1.15: Una comisión para la brigada ecológica

Un instituto tiene 9 personas voluntarias para su brigada ecológica: 5 son de ESO y 4 de Bachillerato. ¿Cuántas comisiones de 4 personas tienen exactamente 2 de Bachillerato?

Solución. Elegimos las personas de cada etapa por separado y multiplicamos: $\binom{4}{2} \binom{5}{2} = 6 \cdot 10 = 60$.

Lección: cuando la condición separa a los elementos en grupos, se cuenta cada grupo con combinaciones y se multiplica.

Ejemplo 1.16: Caminos, otra vez

Recuperemos los caminos de A a B (4 pasos a la derecha, 3 hacia arriba). Calcúlos con combinaciones.

Solución. Un camino tiene 7 pasos y solo hay que decidir *en cuáles* de esos 7 pasos vamos hacia arriba: $\binom{7}{3} = 35$. Coincide con $\frac{7!}{4!3!}$: las combinaciones son un caso particular de las permutaciones con repetición con dos tipos de elementos.

Ejemplo 1.17: Demostrar la regla de Pascal contando

Demuestra que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ sin usar la fórmula con factoriales.

Solución. Contemos los comités de k personas elegidos entre n personas, una de las cuales es Ana. Hay dos tipos de comités:

- Los que incluyen a Ana: faltan $k - 1$ miembros elegidos entre las otras $n - 1$: $\binom{n-1}{k-1}$.
- Los que no incluyen a Ana: elegimos los k miembros entre las otras $n - 1$: $\binom{n-1}{k}$.

Como todos los comités son de uno de los dos tipos, el total $\binom{n}{k}$ es la suma. Este argumento, contar lo mismo de dos formas, se llama **doblo conteo**.

Ejemplo 1.18: Las filas del triángulo suman 2^n

Explica con subconjuntos por qué $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Solución. Contamos todos los subconjuntos de un conjunto de n elementos. Por un lado hay 2^n (ejemplo de los subconjuntos). Por otro, clasificándolos por tamaño k , hay $\binom{n}{k}$ de tamaño k para $k = 0, \dots, n$. Ambos recuentos coinciden.

Resumen

Antes de contar, pregúntate: *¿el orden importa? ¿se pueden repetir elementos?*

Situación	¿Orden?	Nombre
Elegir y ordenar k de n , pudiendo repetir	Sí	Variaciones con repetición
Elegir y ordenar k de n , sin repetir	Sí	Variaciones sin repetición
Ordenar los n elementos	Sí	Permutaciones
Ordenar n elementos con algunos iguales	Sí	Permutaciones con repetición
Elegir un grupo de k de n	No	Combinaciones

Para practicar

1. ¿Cuántos números de 4 cifras tienen todas sus cifras distintas?
2. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de BANANA?
3. De un grupo de 10 personas queremos formar un comité de 4 y elegir además a su presidente entre ellas. ¿De cuántas formas?
4. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono convexo?
5. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez 8×8 de modo que no se ataquen entre sí?

2. Calcular una probabilidad

Problema 2.1: Dos dados

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea 7?

Pensemos. Hay que contar los resultados posibles y cuántos nos interesan. Cada pareja (x, y) con $x, y \in \{1, \dots, 6\}$ tiene la misma probabilidad. Dibujémoslas todas junto a su suma:

dado 1 ↓ dado 2 →	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Herramienta: Regla de Laplace

Si un experimento aleatorio tiene n resultados posibles, todos con la misma probabilidad (equiprobables), la probabilidad de un suceso A es

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Dos trucos útiles:

- **Complementario:** $P(\text{no } A) = 1 - P(A)$. Si cuesta contar A , cuenta lo contrario.
- **La combinatoria cuenta los casos:** tanto los favorables como los posibles se cuentan con las fórmulas de la sección anterior.

Solución. Hay 36 casos posibles y 6 favorables: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ (la diagonal verde). Así que $P = 6/36 = 1/6$.

Ejemplo 2.2: Un dado par

¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado el resultado sea par?

Solución. Casos posibles: 6. Favorables: 2, 4 y 6. Luego $P = 3/6 = 1/2$.

Ejemplo 2.3: Dos ases

Se extraen 2 cartas de una baraja española de 40 cartas (que contiene 4 ases). ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean ases?

Solución. Casos posibles: manos de 2 cartas, $\binom{40}{2} = 780$. Favorables: elegir 2 de los 4 ases, $\binom{4}{2} = 6$. Luego $P = 6/780 = 1/130$.

Ejemplo 2.4: La urna

Una urna tiene 4 bolas rojas y 6 azules. Extraemos 3 bolas a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean rojas?

Solución. Posibles: $\binom{10}{3} = 120$. Favorables: 2 rojas de 4 y 1 azul de 6: $\binom{4}{2}\binom{6}{1} = 36$. Luego $P = 36/120 = 3/10$.

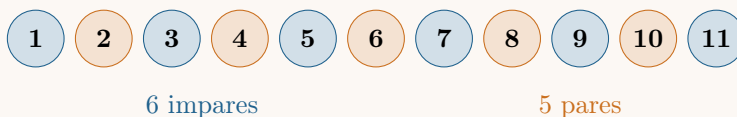
Ejemplo 2.5: Al menos una cara

Lanzamos 3 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

Solución. Contar «al menos una» es incómodo; contemos el contrario, «ninguna cara», es decir, tres cruces. Hay $2^3 = 8$ resultados y solo 1 es +++ . Entonces $P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Ejemplo 2.6: El equipo de fútbol

En un equipo de fútbol hay 11 jugadores con camisetas numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?



Solución. Casos posibles: $\binom{11}{6} = 462$.

Casos favorables. Una suma es impar si y solo si hay una **cantidad impar de sumandos impares**. Entre los números del 1 al 11 hay 6 impares (1, 3, 5, 7, 9, 11) y 5 pares. Si elegimos i camisetas impares y $6 - i$ pares:

impares i	pares $6 - i$	formas
1	5	$\binom{6}{1}\binom{5}{5} = 6$
3	3	$\binom{6}{3}\binom{5}{3} = 200$
5	1	$\binom{6}{5}\binom{5}{1} = 30$

Hay $6 + 200 + 30 = 236$ casos favorables. Por tanto

$$P = \frac{236}{462} = \frac{118}{231} \approx 0,51.$$

Para practicar

1. Lanzamos dos dados. ¿Probabilidad de que la suma sea al menos 10?
2. Un instituto tiene 5 estudiantes de ESO y 4 de Bachillerato apuntados a la brigada

ecológica. Se elige al azar una comisión de 3 personas. ¿Probabilidad de que haya al menos una persona de Bachillerato? (Pista: complementario.)

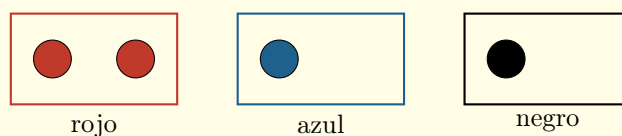
3. Principio del palomar

Problema 3.1: Calcetines en la oscuridad

En un cajón hay muchos calcetines mezclados de 3 colores: rojo, azul y negro. Es de noche y no ves nada. ¿Cuántos calcetines debes sacar para estar *seguro* de tener al menos un par del mismo color?

Pensemos. Con 3 calcetines podríamos tener mala suerte: uno de cada color. Pero si sacamos un cuarto, ya no podemos evitar repetir color. Con 4 calcetines seguro tenemos par, y con 3 no está garantizado. La respuesta es 4.

¡dos en el mismo cajón!



Los calcetines son los «objetos» y los colores son los «cajones» (los palomares).

Herramienta: Principio del palomar (Dirichlet)

Versión básica. Si se reparten n objetos en $n - 1$ cajones, algún cajón contiene al menos dos objetos.

Versión general. Si se reparten n objetos en k cajones, algún cajón contiene al menos $\lceil n/k \rceil$ objetos, donde $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual que x .

Demostración (por reducción al absurdo). Si cada cajón tuviera menos de $\lceil n/k \rceil$ objetos, tendría como mucho $\lceil n/k \rceil - 1 < n/k$. Entre los k cajones habría menos de n objetos, lo que es una contradicción. Por ejemplo, con 7 lápices y 3 estuches, si cada estuche tuviera como mucho 2 lápices habría como mucho 6 en total: absurdo. Así que algún estuche tiene al menos $\lceil 7/3 \rceil = 3$ lápices.

Receta para usarlo:

1. ¿Cuáles son los «objetos»?
2. ¿Cuáles son los «cajones»? (Aquí está el ingenio: hay que *inventar* los cajones.)
3. Comprueba que hay más objetos que cajones y concluye.

¡Cuidado! El principio dice que *existe* un cajón con muchos objetos, pero nada sobre cuál es ni sobre cómo se distribuyen. Sirve para demostrar existencia, no para localizar.

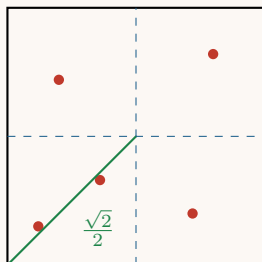
Ejemplo 3.2: Los pasos del maratón

En una gran carrera popular participan 70 000 corredores. Ninguno de ellos da más de 50 000 pasos durante toda la prueba. Demuestra que hay al menos dos corredores que habrán dado exactamente el mismo número de pasos al cruzar la meta.

Solución. Los objetos son los 70 000 participantes. Los cajones corresponden al total de pasos posibles dados por un corredor: $0, 1, 2, \dots, 50\,000$ (50 001 cajones). Al ser $70\,000 > 50\,001$, el principio del palomar asegura que al menos dos corredores completaron la prueba con el mismo número de pasos.

Ejemplo 3.3: Cinco puntos en un cuadrado

Se colocan 5 puntos en un cuadrado de lado 1. Demuestra que hay al menos 2 que distan como máximo $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Solución. Dividimos el cuadrado en 4 cuadrados de lado $\frac{1}{2}$ (los cajones). Hay 5 puntos y 4 cuadrados, así que algún cuadradito contiene al menos 2 puntos. La mayor distancia entre dos puntos de un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ es su diagonal: $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Esos dos puntos distan como máximo $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejemplo 3.4: Inventando los cajones: restos

Demuestra que entre 5 números enteros cualesquiera hay dos cuya diferencia es múltiplo de 4.

Solución. Los cajones son los posibles restos al dividir entre 4: 0, 1, 2, 3. Como hay 5 números y 4 cajones, dos números tienen el mismo resto, y entonces su diferencia es múltiplo de 4.

Ejemplo 3.5: La fiesta

En una fiesta con $n \geq 2$ personas, la amistad es mutua. Demuestra que hay dos personas con el mismo número de amigos en la fiesta.

Solución. Los objetos son las n personas; el «cajón» de cada persona es su número de amigos, que está entre 0 y $n - 1$. Parecen n cajones, pero **no pueden existir a la vez** una persona con 0 amigos y otra con $n - 1$ amigos (esta última sería amiga de todos, incluida la primera). Así que solo se usan como mucho $n - 1$ cajones distintos para n personas y dos coinciden.

Ejemplo 3.6: Pronósticos de calidad del aire

En una ciudad hay 14 estaciones que miden la calidad del aire, y cada día cada estación se clasifica como «buena», «regular» o «mala». Un *pronóstico* asigna a cada estación uno de los

tres niveles. Halla el número mínimo de pronósticos que debemos preparar para asegurar que, sea cual sea la clasificación real, alguno acierte al menos en 5 estaciones.

Solución.

Tres pronósticos bastan. Preparamos tres pronósticos muy simples:

- el pronóstico P_1 dice «buena» en las 14 estaciones;
- el pronóstico P_2 dice «regular» en las 14 estaciones;
- el pronóstico P_3 dice «mala» en las 14 estaciones.

Supongamos ahora que llega el día y nos dan la clasificación *real*, sea cual sea. Cada una de las 14 estaciones tiene un nivel real, que es «buena», «regular» o «mala». Aplicamos el principio del palomar:

- los **objetos** son las 14 estaciones;
- los **cajones** son los 3 niveles: cada estación se coloca en el cajón de su nivel real.

Con 14 estaciones y 3 cajones, algún cajón contiene al menos $\lceil 14/3 \rceil = 5$ estaciones. (Si cada nivel tuviera como mucho 4 estaciones, habría como mucho $3 \cdot 4 = 12 < 14$ estaciones: imposible.)

Dos no bastan. Dados dos pronósticos cualesquiera, en cada estación hay a lo sumo 2 niveles pronosticados, así que queda al menos un nivel libre; lo elegimos como clasificación real. Con esa clasificación, ninguno de los dos pronósticos acierta ninguna estación (0 aciertos).

El mínimo es **3**.

Para practicar

1. En un grupo de 25 personas, demuestra que al menos 3 nacieron en el mismo mes.
2. Demuestra que entre 6 enteros cualesquiera hay dos cuya diferencia es múltiplo de 5.
3. Se eligen 11 números del conjunto $\{1, 2, \dots, 20\}$. Demuestra que hay dos tales que uno divide al otro. (Pista: escribe cada número como $2^a \cdot m$ con m impar.)

Resumen: ¿qué herramienta uso?

Si el problema...	Prueba con...
pide <i>cuántas</i> formas hay de elegir u ordenar	Regla del producto; variaciones, permutaciones, combinaciones. Pregúntate si importa el orden y si hay repetición.
pide una <i>probabilidad</i> con casos equiprobables	Laplace: casos favorables entre casos posibles, contados con combinatoria. Si «al menos uno» es difícil, usa el complementario.
dice «demuestra que <i>existen</i> dos con la misma...» o «al menos k ...»	Palomar: inventa los cajones (restos, regiones, valores posibles).

Pistas y respuestas a los ejercicios

Combinatoria.

1. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ (la primera cifra no puede ser 0).
2. $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$.
3. $\binom{10}{4} \cdot 4 = 840$ (o bien $10 \cdot \binom{9}{3} = 840$: primero el presidente).
4. Cada par de vértices determina un segmento: $\binom{10}{2} = 45$, y hay que restar los 10 lados: 35.
5. $8! = 40320$ (una torre por fila, y las columnas se asignan en algún orden).

Probabilidad.

1. Casos favorables: $(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$, es decir, 6 de 36: $1/6$.
2. $1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$.

Palomar.

1. $\lceil 25/12 \rceil = 3$: 12 meses (cajones), 25 personas (objetos).
2. Los 5 restos módulo 5 son los cajones; hay 6 números.
3. Cajones: los 10 números impares $1, 3, \dots, 19$. Todo número se escribe $2^a m$ con m impar, y hay 11 números para 10 cajones. Dos de ellos tienen el mismo m , y el menor divide al mayor.

Cajón (m)	Números	Observaciones
1	1, 2, 4, 8, 16	
3	3, 6, 12	
5	5, 10, 20	
7	7, 14	
9	9, 18	
11, 13, 15, 17, 19	11, 13, 15, 17, 19	uno cada uno

4. Problemas

1. ¿Cuántos divisores tiene un entero positivo n que se descompone como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ donde $p_1, p_2, \dots, p_k$ son primos diferentes?
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar y la segunda sea diferente de la primera?
3. En un campeonato de béisbol jugado por el sistema de eliminatorias se enfrentan n equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente. Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato.
4. Los números naturales se escriben uno a continuación del otro:
123456789101112131415 . . .
¿Qué dígito se encuentra en la posición 2014?
5. (2007) Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?
6. (2002) La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.
7. En una isla del Pacífico se observa que nada más que sobreviven unos camaleones que pueden cambiar de color. En total había 20 verdes, 19 grises y 18 marrones. Se observó que cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos, los dos cambian automáticamente al tercer color y que no cambian de color en ningún otro caso. ¿Es posible que todos los camaleones se vuelvan del mismo color?
8. (2003) ¿Cuántas ternas ordenadas de números enteros y positivos (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que $abc = 7^{39}$?
9. (Manhattan Mathematical Olympiad, 2005) Dados 100 números (naturales), probar que podemos escoger 15 de ellos tal que la diferencia entre dos cualesquiera es múltiplo de 7.
10. (2004) ¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?
11. (2023) Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \dots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b) , con $a < b$ y de manera que $a|b$ (a divide a b), satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cual esta situación es posible.
12. (2009) Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos estará unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n + 1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.
13. (2024) En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien amigos o bien enemigos (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
 - X e Y son amigos.
14. (2026) a) ¿Es posible separar los números del 1 al 60 (ambos incluidos) en 12 conjuntos de 5 números cada uno de forma que la suma de cada conjunto sea la misma? (b) ¿Es posible separar los números del 1 al 35 (ambos incluidos) en 7 conjuntos de 5 números cada uno de forma que la suma de cada conjunto sea la misma?